OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

OCTAVA EDICIÓN

PRUEBA CLASIFICATORIA   NIVEL BÁSICO

Documento de estudio: cuestionario, análisis de preguntas y respuestas.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE
CALI, COLOMBIA

Abril de 2014

BÁSICO

1. Si a la suma de los primeros 10 números naturales pares le restamos la suma de los primeros 10 números naturales impares obtenemos:

   $a)$ 0 $\quad$ $b)$ 1 $\quad$ $c)$ 2 $\quad$ $d)$ 5 $\quad$ $e)$ 10

   Respuesta: e.

   Análisis. Una estrategia eficiente en este caso consiste en agrupar cada sumando **par** con el **impar** anterior a él, y efectuar la resta: $2 - 1 = 1$, $4 - 3 = 1$, $6 - 5 = 1$, y así sucesivamente. Puesto que la resta en cada agrupación es 1 y la cantidad de agrupaciones es 10, entonces el resultado de la resta propuesta en el ejercicio es 10.

   Nota 1. Observe el funcionamiento de esta estrategia con los cuatro primeros pares menos los cuatro primeros impares:

   $$(2+4+6+8)-(1+3+5+7) = (2-1)+(4-3)+6-5)+(8-7) = 1+1+1+1 = 4$$

   Ejercicio. Use la estrategia mencionada para resolver el problema siguiente: ¿Qué resultado se obtiene si a la suma de los primeros 100 números naturales pares le restamos la suma de los primeros 100 números naturales impares?

2. Cuatro amigos comen helado. Se sabe que: Rafael come más helado que Karla, Jaime come más helado que Juanita y que Jaime come menos helado que Karla. ¿Cuál es el amigo que come más helado?

   a) Rafael   b) Jaime   c) Karla   d) Juanita   e) No se puede decidir

   Respuesta: a.

   Análisis. Llamemos R, K, Ja y Ju a las cantidades de helado que comen Rafael, Karla, Jaime y Juanita, respectivamente. Usemos entonces desigualdades para expresar los datos del problema:

$$R > K, \qquad Ja > Ju \qquad Ja < K$$

   Sabemos que, por ejemplo, decir que 10 es mayor que 5 es lo mismo que decir que 5 es menor que 10; en símbolos: $10 > 5$ equivale a $5 < 10$. En general, $a > b$ equivale a $b < a$. En consecuencia los datos del problema los podemos escribir también de la siguiente manera:

$$R > K, \qquad Ja > Ju \qquad K > Ja$$

   Finalmente, un reordenamiento de estas relaciones muestra que $R > K$, $K > Ja$ y $Ja > Ju$, así que el amigo que come más helado es Rafael.

3. Un coleccionista compró 100 dolares en estampillas con valores de $1, 4$ y 12 dolares. ¿Cuántas estampillas le dieron de cada valor si en total le entregaron 40 estampillas?

   a) 20 de 1 dolar, 15 de 4 dolares y 5 de 12 dolares.
   b) 10 de 1 dolar, 23 de 4 dolares y 7 de 12 dolares.
   c) 28 de 1 dolar, 9 de 4 dolares y 3 de 12 dolares.
   d) 9 de 1 dolar, 28 de 4 dolares y 3 de 12 dolares.
   e) 15 de 1 dolar, 19 de 4 dolares y 6 de 12 dolares.

   Respuesta: c.

   Análisis. En este caso se trata simplemente de verificar que la respuesta escogida satisfaga los datos del problema. El ítem c es el único que satisface estas condiciones:

   i Compró 40 estampillas: 28 (de 1 dólar) más 9 (de 4 dólares) más 3 (de 12 dólares).
   ii El valor de la compra fue de 100 dólares: $28 \times 1 + 9 \times 4 + 3 \times 12 = 28 + 36 + 36 = 100$.

4. El promedio (media aritmética) de un conjunto de números es la suma de dichos números dividida entre el total de números que se sumaron. Por ejemplo, el promedio entre 1, 3, 5, 9, 12 y 18 es 8 pues

$$\frac{1+3+5+9+12+18}{6} = 8$$

¿Cúal número debe eliminarse de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6$ para que el promedio de los números restantes sea 4?

$a)$ 1 $b)$ 2 $c)$ 4 $d)$ 5 $e)$ 6

Respuesta: a.

Análisis. Lo fundamental en este ejercicio es la definición de promedio de un conjunto de números:

$$\frac{\text{Suma de los numeros de la lista (o del conjunto)}}{\text{Cantidad de numeros que se sumaron}} = \text{Promedio}$$

Puesto que se debe retirar uno de los seis números dados para que el promedio sea 4, la ecuación que resulta es:

$$\frac{\text{Suma de los numeros que quedan de la lista}}{5} = 4$$

De lo anterior se sigue que $\text{la suma de los numeros que quedan de la lista es } 5 \times 4 = 20$.

Por último, ya que la suma de los seis números dados es 21, el número que se debe retirar es el 1: quedan 5 números cuya suma es 20 y por lo tanto su promedio es $\dfrac{20}{5} = 4$.

Ejercicio. ¿Qué número debe eliminarse de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ para que el promedio de los números restantes sea 6,1?

5. Cinco amigos, Andrés, Benito, Cesar, Darío y Estrella, se ubican en fila india, no se sabe el orden en que están dispuestos. Empiezan a contar de cinco en cinco: el 1° dice 5, el 2° dice 10, el 3° dice 15, el 4° dice 20, el 5° dice 25, y siguen contando en el mismo orden, el 1° dice 30, y así sucesivamente ¿Quién es el primero de la fila si Andrés ha dicho 140, Benito 160, Cesar 130 y Darío 170.

   $a)$ Andrés $\quad b)$ $Benito$ $\quad c)$ $Cesar$ $\quad d)$ Darío $\quad e)$ $Estrella$

   Respuesta: c.

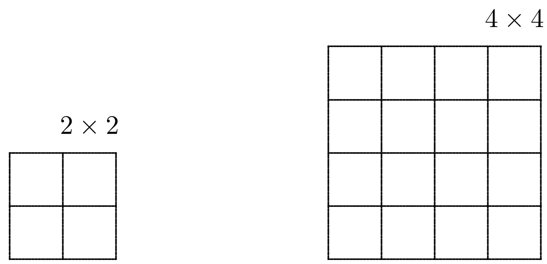
   Análisis. Cada ronda termina en un múltiplo de 25. Por lo tanto:

   Quien dijo 140, Andrés, es el tercero: el cociente de la división $140 \div 25$ es 5 y su residuo 15. Esto significa que después de la quinta ronda ($25 \times 5 = 125$), continúan $130, 135, 140$. Note que la posición se obtiene dividiendo el residuo por 5: $15 \div 5 = 3$.

   Benito, quien dijo 160 ocupa la segunda posición: el residuo de $160 \div 25$ es 10 y $10 \div 5 = 2$.

   César es el primero: el residuo de $130 \div 25$ es 5 y $5 \div 5 = 1$.

6. En una cuadrícula 2×2 se pueden identificar 5 cuadrados: 4 de lado 1, y 1 de lado 2, tal como se muestra en la figura. ¿Cúantos cuadrados distintos se pueden identificar en una cuadrícula 4×4?



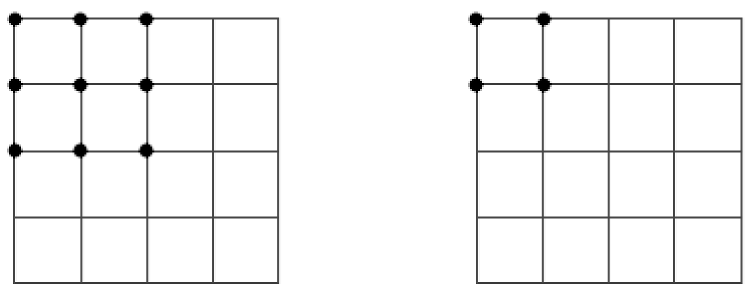
$a)$ 16 $\quad$ $b)$ 17 $\quad$ $c)$ 27 $\quad$ $d)$ 30 $\quad$ $e)$ 48

Respuesta: d.

Análisis. Se deben identificar las cantidades de cuadrados de lados $1, 2, 3$ y 4.

De lado 1 hay obviamente 16 cuadrados; y de lado 4 solamente hay uno: el cuadrado inicial.

Para hallar los cuadrados de lado 2 podemos podemos identificar las esquinas superiores izquierdas de todos ellos y darnos cuenta que son 9, como lo muestra la parte izquierda de la figura siguiente. Luego hay 9 cuadrados 2×2.

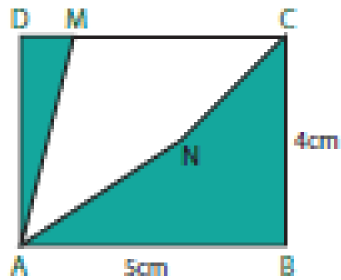


Esquinas superiores 2×2 $\qquad$ **Esquinas superiores 3×3**

Para hallar los cuadrados de lado 3 usamos la misma estrategia: identificamos las esquinas superiores izquierdas de todos ellos y nos damos cuenta que son 4, como lo muestra la parte derecha de la figura anterior. Luego hay 4 cuadrados 3×3.

Por lo tanto la cantidad de cuadrados de una cuadrícula 4×4 es 30: 16 de lado 1, más 9 de lado 2, más 4 de lado 3, más 1 de lado 4.

7. El rectángulo $ABCD$ es tal que el lado $\overline{AB}$ mide 5cm y el lado $\overline{BC}$ mide 4cm. M es un punto de $\overline{CD}$ tal que $\overline{MC} = \overline{BC}$. N es el punto medio de $\overline{MB}$. El área en cm^2 de la region sombreada es:



$a)$ 2 $b)$ 9 $c)$ 10 $d)$ 11 $e)$ 20

Respuesta: d.

Análisis. La región sombreada se puede descomponer en tres triángulos: ADM, ANB y BNC.

Área de $\triangle ADM$. En este triángulo rectángulo (D es recto) tomando DM como base, su altura es AD. La longitud de DM (en cm) es 1 pues $DM = DC - MC$, con $DC = AB = 5$ y $MC = BC = 4$. Por otra parte, $AD = BC = 4$. En consecuencia el área del triángulo ADM es $\frac{1}{2}(1 \times 4) = 2\ cm^2$.

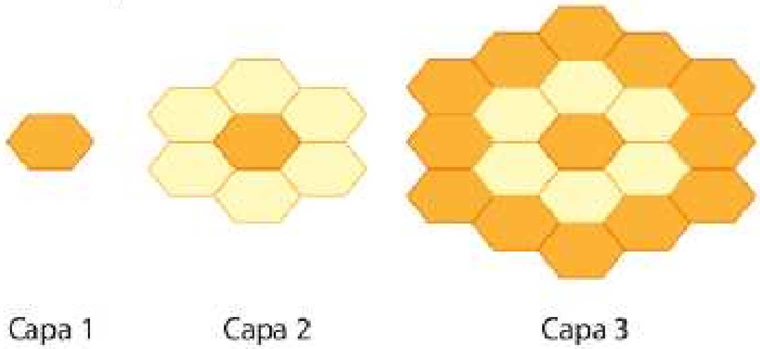
Para determinar las áreas de los triángulos $\triangle ANB$ y $\triangle BNC$ es necesario determinar las distancias del punto N a los lados AB y BC. Para ello, llamemos P al pié de la perpendicular desde M al segmento AB. Entonces el cuadrilátero $PBCM$ es un cuadrado de $4\ cm$ de lado, y N es su centro, por lo cual la distancia de N a cualquiera de los lados del cuadrado es $2\ cm$.

Área de $\triangle ANB$. Como la base AB mide $5\ cm$ y la altura (trazada desde N hasta AB) mide $2\ cm$, entonces el área de $\triangle ANB$ es $5\ cm^2$.

Área de $\triangle BNC$. Como la base BC mide $4\ cm$ y la altura (trazada desde N hasta BC) mide $2\ cm$, entonces el área de $\triangle ANB$ es $4\ cm^2$.

Entonces el área de la región sombreada es la suma de las áreas de los triángulos ADM, ANB y BNC, o sea $2 + 5 + 4 = 11\ cm^2$.

El siguiente enunciado está relacionado con las preguntas 8 y 9. ¿Has observado cómo las abejas construyen su panal?. Este crece por capas. Podemos considerar el primer hexagono como la primera capa. En la siguiente gráfica se muestra hasta la tercera capa.



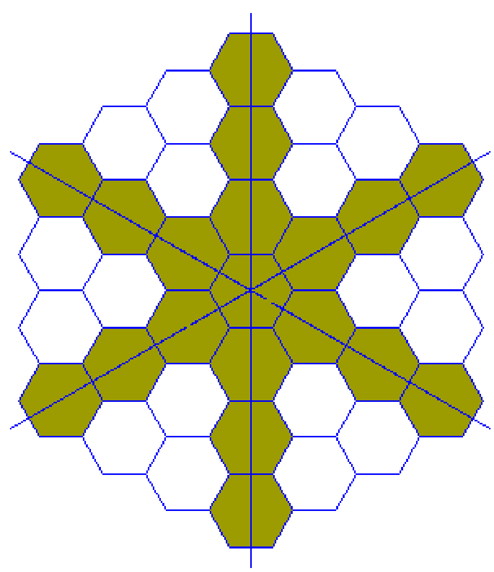
8. Si en cada celda (hexagono) solo habita una abeja, ¿cuántas abejas alberga un panal de cuatro capas?

$a)$ 43 $b)$ 48 $c)$ 55 $d)$ 62 $e)$ 67

Respuesta: Ninguna de las anteriores.

Nota 1. Presentamos disculpas a los participantes por este error nuestro. En relación con esta pregunta, hemos tomado la decisión de eliminarla en la corrección de la prueba.

Nota 2. La figura siguiente muestra que la cuarta capa tiene 18 celdas y por lo tanto el total de celdas, o de abejas del panal, es $1 + 6 + 12 + 18 = 37$.

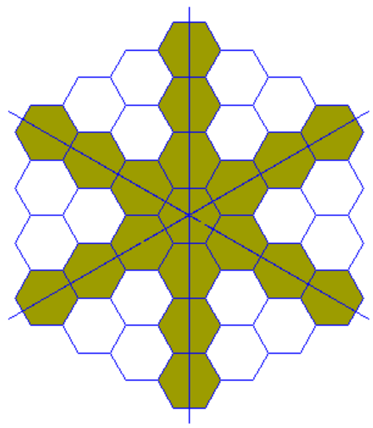


9. Al observar los panales, vemos que el número de bordes externos que delimitan la colmena es: 6 si la colmena solo tiene un nivel y 18 si la colmena tiene 2 niveles. ¿Cúal será el número de bordes externos de la colmena con 4 capas?

$a)$ 34 $b)$ 38 $c)$ 42 $d)$ 46 $e)$ 50

Respuesta: c.

Análisis. El conteo sobre la figuara siguiente muestra que el número de bordes externos de la colmena con 4 capas es 42. No obstante, con el propósito de comprender mejor el problema (de las preguntas 8 y 9), haremos enseguida algunas consideracionas adicionales.



Regularidades del problema y posibilidad de generalización.

i En cualquier panal, diferenciaremos dos tipos de celdas. Para ello, identifiquemos el centro del hexágono de la capa 1 y tracemos por él las tres rectas perpendiculares a los lados de tal hexágono.

  a Llamaremos celda tipo A a toda celda con intersección no vacía con alguna de esas rectas.

  b Toda otra celda del panal que no sea tipo A, será llamada celda tipo B.

ii Note que todas las de las capas 1 y 2 son tipo A. También debe ser claro que toda capa, a partir de la segunda, contiene exactamente 6 celdas tipo A. Observe además que, a partir de la segunda capa, sobre una celda tipo A se puede construir solamente una celda tipo A en la capa siguiente.

iii Es claro que las capas 1 y 2 no contienen celdas tipo B pero, a partir de la tercera, todas las demás capas tienen celdas tipo B, y su cantidad es un múltiplo de 6: basta ver que las rectas definidas en i generan 6 regiones, cada una de las cuales tiene la misma cantidad de celdas tipo B.

iv Las celdas tipo B tienen las siguientes propiedades: i) si dos celdas adyacentes son de tipo contrario entonces sobre ellas dos se apoya una celda tipo B **de la capa siguiente**; y ii) si dos celdas adyacentes son de tipo B entonces sobre ellas dos se apoya una celda tipo B de la capa siguiente.

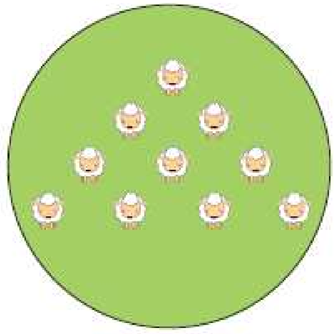
v Si una celda tipo A tiene lados de la frontera del panal, la cantidad de ellos es 3.

  Si una celda tipo B tiene lados de la frontera del panal, la cantidad de ellos es 2.

Ejercicio. ¿Cuántas celdas tiene un panal de 7 capas? ¿Cúal será el número de bordes externos de la colmena con 7 capas?

10. Un granjero tiene 10 ovejas que duermen sobre un prado dentro de un corral circular y están ubicadas como se indica en la figura. El granjero piensa que debe separarlas con vallas rectas que atraviesen el corral. Si desea que cada oveja este en un único espacio, ¿cúal es el mínimo número de vallas que necesita para hacerlo? Las vallas se pueden cruzar.

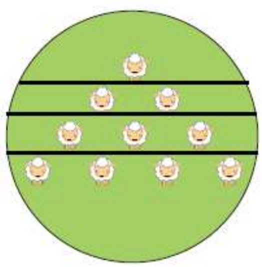
    $a)$ 2 $b)$ 3 $c)$ 4 $d)$ 5 $e)$ 6

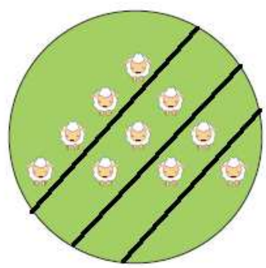


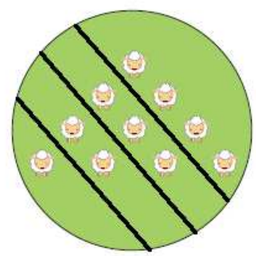
Respuesta: d.

Análisis. La ubicación de las ovejas mostrada en la figura tiene la forma de un triángulo equilátero.

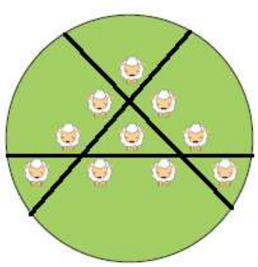
Como cada lado está formado por cuatro puntos que deben ser separados por vallas, el número de estas debe ser por lo menos 3: horizontales u oblicuas, como se muestra enseguida.

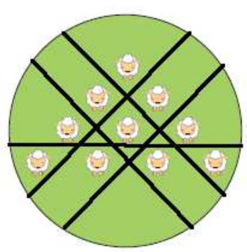






Como se observa, cada una de estas separaciones deja un lado sin separar, lo cual exigiría agregar tres vallas más. No obstante, una combinación de los tres tipos anteriores de vallas produce una mejor configuración: solo requiere dos nuevas vallas, como lo muestra la primera de las figuras siguientes. La última figura muestra una de las posibles soluciones del problema.





11. Tiger sale en persecución de Roo que está a 30 metros de distancia. Cada salto de Tiger es de 2 metros, mientras que los de Roo son de 1 metro. Si Tiger da dos saltos en lo que Roo da tres, a qué distancia (en metros) del punto de donde sale, Tiger alcanzará a Roo?

   $a)$ 60 $b)$ 80 $c)$ 90 $d)$ 120 $e)$ 150

   Respuesta: d.

   Análisis. Dos informaciones básicas que deben ser combinadas son las siguientes:

   i Cada salto de Tiger es de 2 metros, mientras que los de Roo son de 1 metro.

   ii Tiger da dos saltos en lo que Roo da tres.

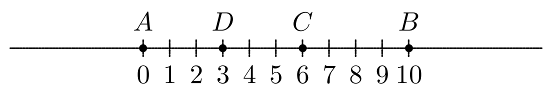
   Lo anterior significa que mientras Tiger avanza 4 metros (en dos saltos), Roo avanza 3 metros (dando tres saltos), o sea que le descuenta 1 metro. Por lo tanto, para descontar la desventaja inicial y alcanzar a Roo, Tiger debe repetir esta acción 30 veces: $30 \times 4 = 120$ (metros).

12. Los puntos A y B distan 10 unidades entre sí. Los puntos B y C distan 4 unidades entre sí. Los puntos C y D distan 3 unidades entre sí. Si la distancia entre los puntos A y D es la menor posible, entonces el número de unidades que los separa es:

    a) 0 *b*) 3 *c*) 9 *d*) 11 *e*) 17

    Respuesta: b.

    Análisis. Para que la distancia entre los puntos A y D sea la menor posible, los cuatro puntos deben estar alineados, como se muestra en la figura siguiente:

    Por lo tanto la menor distancia posible entre A y D es 3 unidades.