# OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

OCTAVA EDICIÓN

PRUEBA CLASIFICATORIA     NIVEL MEDIO

**Documento de estudio: cuestionario, análisis de preguntas y respuestas**.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE
CALI, COLOMBIA

Abril de 2014

1. El volumen de una caja rectangular es de 36 centímetros cúbicos. Si las dimensiones de la caja son números naturales distintos. ¿Cúal es la mayor suma posible de las medidas de los tres lados de la caja?

   $a)$ $11cm$ $b)$ $13cm$ $c)$ $14cm$ $d)$ $16cm$ $e)$ $21cm$

   **Respuesta**: e.

   **Análisis**. El volumen de una caja rectangular es el producto de las longitudes de tres de sus aristas perpendiculares entre sí, de modo que el problema consiste en expresar $36$ como un producto de tres números naturales cuya suma sea la mayor posible.

   La descomposición de $36$ en sus factores primos es $2^2 \times 3^2$. No obstante, y en este caso esto es importante, también se puede escribir $36 = 1 \times 2^2 \times 3^2$. En esta descomposición, $1 \times 4 \times 9$, la suma de sus factores es $14$; pero la mejor es $1 \times 2 \times (2 \times 3^2) = 1 \times 2 \times 18$: sus factores suman $21$.

   **Nota 1**. La descomposición escogida es la mejor porque los factores más pequeños que se pueden tomar son $1$ y $2$.

   **Nota 2**. Observe que la descomposición de $36$ en factores naturales cuya suma sea máxima es $1 \times 1 \times 36$ (la suma de sus factores es $38$); no obstante, esta opción queda descartada porque el enunciado del problema exige que los tres números naturales sean distintos.

2. El promedio (media aritmética) de un conjunto de números es la suma de dichos números dividida entre el total de números que se sumaron. Por ejemplo, el promedio entre 4, 5, 10 y 13 es 8 puesto que

$$\frac{4+5+10+13}{4} = 8$$

¿Qué número debe eliminarse de la lista:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

para que el promedio de los números restantes sea 6,1?

$a)$ 5 $b)$ 6 $c)$ 7 $d)$ 8 $e)$ 9

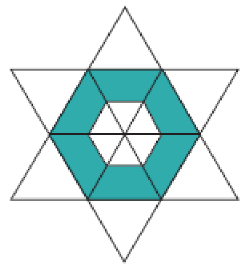
**Respuesta**: a.

**Análisis**. Lo fundamental en este ejercicio es la definición de promedio de un conjunto de números: $p = \frac{s}{n}$, donde $s$ es la suma de tales números y $n$ es la cantidad de ellos.

Puesto que se debe retirar uno de los once números dados para que el promedio sea $6.1$, la ecuación resultante es $\frac{s}{10} = 6.1$, de lo cual se sigue que $s = 61$.

Por último, ya que la suma de los once números dados es $66$, el número que se debe retirar es el $5$: quedan $10$ números cuya suma es $61$ y por lo tanto su promedio es $\frac{61}{10} = 6.1$.

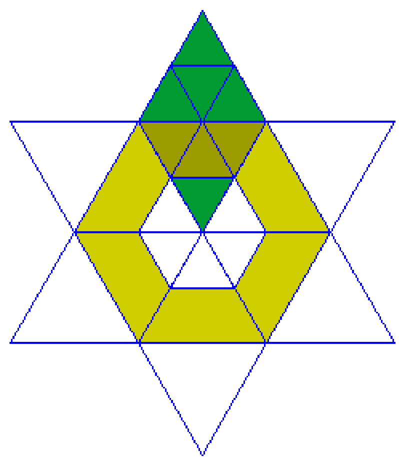
3. ¿Cúal es la razón entre el área sombreada y el área total de la figura?



$a)\ \frac{1}{3}$ $b)\ \frac{3}{8}$ $c)\ \frac{5}{12}$ $d)\ \frac{1}{2}$ $e)\ \frac{3}{4}$

**Respuesta**: b.

**Análisis**. La figura completa (estrella) se puede dividir en seis rombos congruentes (o iguales), cada uno de los cuales se puede a la vez subdividir en ocho triángulo rectángulos congruentes, de los cuales solo tres corresponden a la región sombreada.



Por lo tanto la razón entre el área de la región sombreada y el área total de la figura es $\frac{3}{8}$.

4. De cuántas maneras se puede escribir el número 2000 como producto de dos factores enteros mayores que 1?

   $a)$ 7 $b)$ 8 $c)$ 9 $d)$ 10 $e)$ 11

   **Respuesta**: c.

   **Análisis**. Descompongamos 2000 en sus factores primos: $2000 = 2 \times 1000 = 2 \times (2 \times 5)^3 = 2^4 \times 5^3$. Por lo tanto 2000 es el producto de **siete** factores primos. Debemos expresarlo como un producto de dos números naturales mayores que uno: $2000 = a \times b$.

   ¿Cuántos conjuntos $\{a, b\}$ de números naturales mayores que uno podemos escoger, sabiendo que $a \times b = b \times a = 2000$?

   Este es un problema de **conteo**. Una estrategia para obtener su solución consiste en observar la cantidad de factores primos que pueden tener $a$ y $b$ (es como si tuviésemos dos bolsas, una con cuatro balotas $-$cada una marcada con el número $2-$ y la otra con tres balotas marcadas con el $3$, y pretendiésemos hallar dos conjuntos no vacíos cuya unión fuese el conjunto de las siete balotas). Se identifican entonces tres casos:

   i Si uno de los números es primo, el otro tiene seis factores primos.

   ii Si uno de los números tiene dos factores primos, el otro tiene cinco factores primos.

   iii Si uno de los números tiene tres factores primos, el otro tiene cuatro factores primos.

   Observe que, por conmutatividad del producto, estos son todos los casos posibles: si, por ejemplo, uno de los números contiene cuatro factores primos, entonces el otro contiene tres factores primos: caso iii.

   Veamos ahora, en cada caso, cuántos factores $a, b$ podemos hallar¿

   **Caso 1**. Uno de los números es primo y el otro tiene seis factores primos. Posibilidades:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Un número es $2$ | el otro es $2^3 \times 3^3$. |
| (2) | Un número es $3$ | el otro es $2^4 \times 3^2$. |

   **Caso 2**. Uno de los números tiene dos factores primos y el otro tiene cinco factores primos:

| | | |
|---|---|---|
| (3) | Un número es $2^2$ | el otro es $2^2 \times 5^3$. |
| (4) | Un número es $2 \times 5$ | el otro es $2^3 \times 5^2$. |
| (5) | Un número es $5^2$ | el otro es $2^4 \times 5$. |

   **Caso 3**. Uno de los números tiene tres factores primos y el otro tiene cuatro factores primos:

| | | |
|---|---|---|
| (6) | Un número es $2^3$ | el otro es $2 \times 5^3$. |
| (7) | Un número es $2^2 \times 5$ | el otro es $2^2 \times 5^2$. |
| (8) | Un número es $2 \times 5^2$ | el otro es $2^3 \times 5$. |
| (9) | Un número es $5^3$ | el otro es $2^4$. |

   En total hay 9 maneras de expresar 2000 como un producto de dos números enteros mayores que $1$.

5. Hace 18 años Luis era 3 veces más viejo que su hijo, actualmente, él es 2 veces más viejo que su hijo. ¿Cuántos años suman las edades de Luis y su hijo actualmente?

$a)$ 54 $b)$ 93 $c)$ 108 $d)$ 120 $e)$ 125

**Respuesta**: c.

**Análisis**. Este es un ejercicio de manejo algebraico. Llamemos $L$ y $H$ a las edades actuales de Luis y de su hijo, respectivamente. Expresemos en símbolos los datos del problema:

i Hace $18$ años la edad de Luis era el triple de la de su hijo: $L - 18 = 3(H - 18)$.

ii Actualmente la edad de Luis es el doble de la de su hijo: $L = 2H$.

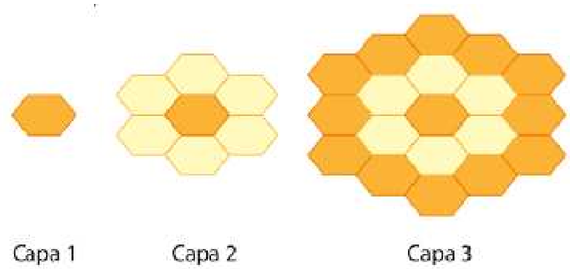
Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Reemplazando $L = 2H$ en la primera se obtiene:

$$2H - 18 = 3(H - 18) \quad \leftrightarrow \quad 2H - 18 = 3H - 54 \quad \leftrightarrow \quad H = 36$$

Entonces $L = 2H = 72$, así que las edades actuales de Luis y de su hijo son $72$ y $36$ años, y la suma de ellas es $108$ años.

**Nota**. Verificar que la respuesta de un ejercicio satisface los datos del mismo es una práctica recomendable (de este modo se gana autonomía al no depender de las respuestas de un libro o del profesor). En este caso es claro que la edad de Luis (72) es el doble de la de su hijo (36), y hace $18$ años la de Luis $72 - 18 = 56$ era el triple de la de su hijo $36 - 18 = 18$.

El siguiente enunciado está relacionado con las preguntas 6 y 7. ¿Has observado cómo las abejas construyen su panal? Este crece por capas de celdas hexagonales...




6. Si en cada celda (hexagono) solo habita una abeja, ¿cuántas abejas alberga un panal de cinco capas?

$a)$ 43 $b)$ 48 $c)$ 55 $d)$ 61 $e)$ 67

**Respuesta**: d.

**Análisis**. En este punto y en el siguiente, el procedimiento más adecuado es el de tratar de identificar algunas regularidades y obtener conjeturas razonables que permitan responder las preguntas.
(En las condiciones de un examen es a veces difícil **probar** la veracidad de ciertas conjeturas).

Tratemos de identificar la cantidad de celdas hexagonales de **cada capa**.

**Observación 1**. De la información dada se obtiene:

| **Capa** $\#$ | $\#$ **de celdas** |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 6 |
| 3 | 12 |

**Observación 2**. Un cálculo directo (en la figura de la capa 3) muestra que la capa $4$ contiene $18$ celdas.

Después de observar que las cantidades de celdas de las primeras capas generan la sucesión $1, 6, 12, 18$, **conjeturamos** que la cantidad de celdas de las capas crece de $6$ en $6$ (a partir de la segunda), y por lo tanto el número de celdas de las primeras $5$ capas está dado en la sucesión $1, 6, 12, 18, 24$.

En consecuencia, y asumiendo que la conjetura es cierta, la cantidad de celdas (y por lo tanto de abejas) del panal es $127$:

$$1 + 6 + 12 + 18 + 24 = 61$$

**Nota**. La veracidad de esta conjetura la justificaremos en el ANEXO I, al final de este documento.

**Nota**. Para generalizar el problema, es conveniente escribir la suma anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&1 + 6 + 12 + 18 + 24\\
&= 1 + 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4\\
&= 1 + 6(1 + 2 + 3 + 4)
\end{aligned}$$

**Ejercicio**. i. Utilizando la conjetura propuesta, halle una fórmula para el total de celdas de un panal de $n$ capas, siendo $n$ un número natural. ii. Utilice la fórmula encontrada en i para determinar el total de celdas de un panal de $1$ capa, de $2$ capas, de $3$ capas y de $5$ capas. (Si su fórmula es buena, estos resultados deben ser $1$, $7$, $19$ y $61$).

7. Al observar los panales, vemos que el número de bordes externos que delimitan la colmena es: $6$ si la colmena solo tiene una capa y $18$ si la colmena tiene 2 capas. ¿Cuál será el número de bordes externos de la colmena con 5 capas?

   $a)$ 42 $b)$ 48 $c)$ 54 $d)$ 60 $e)$ 66

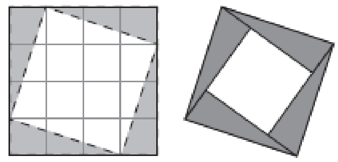
   **Respuesta**: c.

   **Análisis**. De la figura de la capa $3$ se observa que el número de bordes externos es $30$, y por lo tanto la cantidad de bordes externos de una colmena cuyo números de capas es $1, 2, 3$ es $6, 18$ y $30$, respectivamente, lo cual sugiere como ley de formación $6 \times 1$, $6 \times 3$, $6 \times 5$, y en general $6(2n - 1)$ bordes externos para una colmena de $n$ capas (esta es **otra conjetura**).

   En consecuencia, y asumiendo la veracidad de la conjetura, el número de bordes externos de la colmena de $5$ capas es $6(2 \times 5 - 1) = 6 \times 9 = 54$.

   **Nota**. La demostración de la veracidad de esta conjetura se hará en el ANEXO II.

8. Se tiene una hoja de papel cuadrada de 4 pulgadas de lado. Se divide en cuatro partes iguales cada lado y se dobla hacia atrás por los segmentos punteados que se indican en la figura. ¿Cuál es el área del cuadrado resultante?



$a)$ 8 $b)$ 9 $c)$ 10 $d)$ 11 $e)$ 16

**Respuesta**: c.

**Análisis**. La región que se dobla está formada por cuatro triángulos rectángulos (congruentes), cada uno de los cuales tiene catetos de longitudes $1$ y $3$ pulgadas, y por lo tanto un área de $3/2\ pul^2$.

En consecuencia el área de la región doblada es $4 \times 3/2 = 6\ (pulg^2)$.

Como el cuadrado inicial tiene un área de $16\ pulg^2$, el área del cuadrado resultante es $16 - 6 = 10\ (pulg^2)$.

9. Por razones ecológicas y económicas, don Gabriel recicla las llantas de su carro. Él ha desarrollado un método para construir llantas nuevas a partir de llantas viejas; su sistema es tan eficaz que puede construir una llanta nueva con seis llantas viejas, además cada llanta que don Gabriel hace le dura un año. En marzo de 2013 le pone llantas recicladas a su carro, y le quedan 67 llantas viejas. Si su carro gasta cuatro llantas por año, ¿cuándo tendría que volver a comprar llantas nuevas?

   a) Marzo de 2017 b) Abril de 2017 c) Marzo de 2018 d) Abril de 2018 e) Marzo de 2019

   **Respuesta**: a.

   **Análisis**. Por el enunciado del ejercicio, el cambio de llantas es anual, en marzo de cada año cambia cuatro llantas, lo cual descarta las opciones b y d. Por otra parte, cada año podrá hacer el cambio por llantas recicladas si dispone de por lo menos $6 \times 4 = 24$ llantas viejas.

   Lo anterior significa que de las $67$ llantas viejas que le quedan en marzo de 2013, podrá obtener $48$ recicladas ($67 = 2 \times 24 + 19$) y le quedarán aún $19$ llantas viejas, de modo que con ellas puede cambiar llantas durante otros dos años: 2014 y 2015.

   Como los cambios de llantas en 2014 y 2015 le dejan $4$ llantas usadas por año, entonces para marzo de 2016 tendrá $19 + 2 \times 4 = 19 + 8 = 27$ llantas viejas, con las cuales podrá reciclar $24$ y hacer el cambio anual.

   En marzo de 2017 a don Gabriel le quedan solo 7 llantas viejas (¿por qué?), por lo cual deberá comprar llantas nuevas para hacer el cambio anual.

   **Ejercicio**. Con el enunciado del ejercicio, suponga que después de un cambio de llantas recicladas, a don Gabriel le quedan $N$ llantas viejas y puede hacer cambios anuales con llantas recicladas durante $t$ años. ¿Cuántas llantas viejas le quedan después de esos $t$ años de hacer los cambios?

   **Nota**. Si su respuesta es buena, al reemplazar $N$ por $67$ y $t$ por $3$ (con los datos del ejercicio del cuestionario solo puede hacer tres cambios de llantas recicladas), el valor numérico de ella debe ser $3$.

10. Si a la suma de los primeros $100$ números naturales pares le restamos la suma de los primeros $100$ números naturales impares obtenemos:

$a)$ 0 $\quad$ $b)$ 10 $\quad$ $c)$ 25 $\quad$ $d)$ 50 $\quad$ $e)$ 100

**Respuesta**: e.

**Análisis**. Una estrategia eficiente en este caso consiste en agrupar cada sumando **par** con el **impar** anterior a él, y efectuar la resta: $2-1=1,\ 4-3=1,\ 6-5=1,$ y así sucesivamente. Puesto que la resta en cada agrupación es $1$ y la cantidad de agrupaciones es $100$, entonces el resultado de la resta propuesta en el ejercicio es $100$.

**Nota 1**. Las habilidades tanto de transformar problemas en otros equivalentes al original como de identificar regularidades, son altamente valoradas en el quehacer matemático. A manera de ejemplo, seguidamente se muestra una forma de hallar (y probar la validez de) una fórmula para la suma de los $n$ primeros números naturales: $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

La observación de que, en la suma propuesta, la suma del primer sumando con el último es igual a la del segundo con el penúltimo, del tercero con el antepenúltimo, etc., sugiere escribir dicha suma $(S)$ de dos maneras, primero en orden creciente y luego en orden decreciente.

$$S = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + ... + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores, y agrupando en el lado derecho cada término de la primera fila con el correspondiente de la segunda, se obtiene la siguiente ecuación:

$$2S = (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) = n(n+1)$$

Finalmente, como $2S = n(n+1)$, al despejar $S$ se obtiene $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

**Ejercicio 1**. Use un procedimiento análogo al anterior para deducir las fórmulas correspondientes a las sumas de los $n$ primeros números naturales pares y de los $n$ primeros naturales impares:

$$2+4+...+2n = n(n+1)$$
$$1+3+...+(2n-1) = n^2$$

**Nota 1**. Otra estrategia que pudo usarse en este punto es la de hallar por separado las sumas de los pares y de los impares, y hacer la resta de ellas. La generalización de este problema exige simbolizar adecuadamente los pares y los impares y usar las fórmulas del ejercicio $1$.

Los primeros naturales pares se pueden escribir de la siguiente manera: $2 = 2\times 1,\ 4 = 2\times 2,\ 6 = 2\times 3;$ en general, el $n-$ésimo natural par es $2n$. (Si $n$ es un **entero**, $2n$ es par, positivo, negativo o cero).

Los primeros naturales pares se pueden escribir así: $1 = 2\times 1-1,\ 3 = 2\times 2-1,\ 5 = 2\times 3-1;$ en general, el $n-$ésimo natural impar es $2n-1$.

**Ejercicio 2** (Generalización del punto $10$ del cuestionario).

i Si a la suma de los primeros $n$ números naturales pares le restamos la suma de los primeros $n$ números naturales impares, ¿qué resultado obtenemos?

ii Verifique la respuesta del punto $10$ del cuestionario como un caso particular del ejercicio anterior.

iii Si el $k-$ésimo natural impar se escribe de la forma $2n+1$, ¿qué valor tiene $n$?

11. Si se aumenta el radio de un círculo en un $100\,\%$, su área aumenta en un:

a) $100\,\%$ b) $200\,\%$ c) $300\,\%$ d) $400\,\%$ e) $500\,\%$

**Respuesta**: c.

**Análisis**. Supongamos que el radio del círculo inicial es $R$. Puesto que el $100\,\%$ de $R$ es $R$, el radio del círculo ampliado será $2R$. Por lo tanto las áreas del círculo inicial y del ampliado serán $\pi R^2$ y $\pi(2R)^2 = 4\pi R^2$, respectivamente. Esto significa que el área se ha aumentado o incrementado en $4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2$. En consecuencia, el porcentaje de este incremento, con respecto al área del círculo inicial, es $\dfrac{100 \times 3\pi R^2}{\pi R^2} = 300\,\%$.

**Nota**. Un análisis más detallado de este ejercicio requiere precisar los conceptos de porcentaje e incremento absoluto, incremento relativo y porcentaje de incremento de una cantidad. Veamos cada uno de esos aspectos.

**Porcentaje**. Empecemos con un ejemplo: el $25\,\%$ de $40$ es $10$, lo cual se logra sabiendo que el $25\,\%$ de una cantidad es la cuarta parte de ella: $25\,\%C = \dfrac{25}{100}C = \dfrac{1}{4}C$. En general, el $n\,\%$ de $C$ es $\dfrac{n}{100}C$.

**Incremento absoluto**. Si una cantidad $I$ se transforma en otra $F$, el incremento absoluto de la cantidad inicial se define como $\Delta = F - I$. Por ejemplo, si $I = 50$ y $F = 75$, la cantidad $I$ se ha incrementado en $\Delta = 75 - 50 = 25$. Si $I = 50$ y $F = 40$, $\Delta = 50 - 40 = -10$: ha habido un incremento negativo de $10$ unidades.

**Incremento relativo**. Si una cantidad $I$ se transforma en otra $F$, el incremento relativo de la cantidad inicial se define como $\Delta_r = \dfrac{\Delta}{I}$. Por ejemplo, si $I = 50$ y $F = 75$, la cantidad $I$ ha tenido un incrementado relativo de $\Delta_r = \dfrac{\Delta}{I} = \dfrac{25}{50} = \dfrac{1}{2}$: el incremento ha sido la mitad de $I$.

**Porcentaje de incremento**. Si una cantidad $I$ se transforma en otra $F$, el porcentaje de incremento de $I$ se define como $\%\Delta = 100\Delta_r\,\%$. Por ejemplo, si $I = 50$ y $F = 75$, entonces $I$ se ha incrementado en un $50\,\%$: $\%\Delta = 100\Delta_r\,\% = 100 \times \frac{1}{2}\,\% = 50\,\%$.

En el punto $11$ del cuestionario, con respecto al área se tiene:

$$\Delta = 4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2, \quad \Delta_r = \frac{\Delta}{I} = \frac{3\pi R^2}{\pi R^2} = 3 \quad \text{y} \quad \%\Delta = 100\Delta_r\,\% = 100 \times 3\,\% = 300\,\%.$$

12. Cinco amigos, Andrés, Benito, Cesar, Darío y Estrella, se ubican en fila india, no se sabe el orden en que están dispuestos. Empiezan a contar de cinco en cinco: el 1°dice 5, el 2°dice 10, el 3°dice 15, el 4°dice 20, el 5°dice 25, y siguen contando en el mismo orden, el 1° dice 30, y así sucesivamente. Andrés ha dicho 140, Benito 160, Cesar 130, Darío 170. ¿Quién de ellos diría $2015$?

    a) Andrés    b) Benito    c) Cesar    d) Darío    e) Estrella

    **Respuesta**: a.

    **Análisis**. Cada ronda termina en un múltiplo de $25$. Por lo tanto:

    Quien dijo $140$, Andrés, es el tercero: el cociente de la división $140 \div 25$ es $5$ y su residuo $15$. Esto significa que después de la quinta ronda ($25 \times 5 = 125$), continúan $130, 135, 140$. Note que la posición se obtiene dividiendo el residuo por $5$: $15 \div 5 = 3$.

    Benito, quien dijo $160$ ocupa la segunda posición: el residuo de $160 \div 25$ es $10$ y $10 \div 5 = 2$.

    César es el primero: el residuo de $130 \div 25$ es $5$ y $5 \div 5 = 1$.

    Darío es el cuarto: el residuo de $170 \div 25$ es $20$ y $20 \div 5 = 4$.

    Obviamente Estrella ocupa la quinta posición.

    Ahora, como el residuo de $2015$ es $15$ y $15 \div 5 = 3$, quien dijo $2015$ fue el tercero: Andrés.

    **Comentario**. Andrés dijo $2015$ ¡después de $80$ rondas! Aunque pensándolo mejor, es bastante improbable que cinco personas cuerdas pierdan el tiempo de esa manera...

## ANEXO I

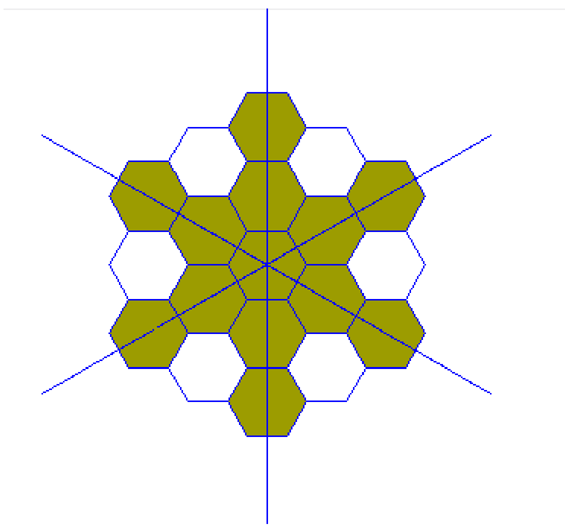
**Prueba de la conjetura según la cual la capa $n$ ($n \geq 2$) contiene $C(n) = 6(n-1)$ celdas.**

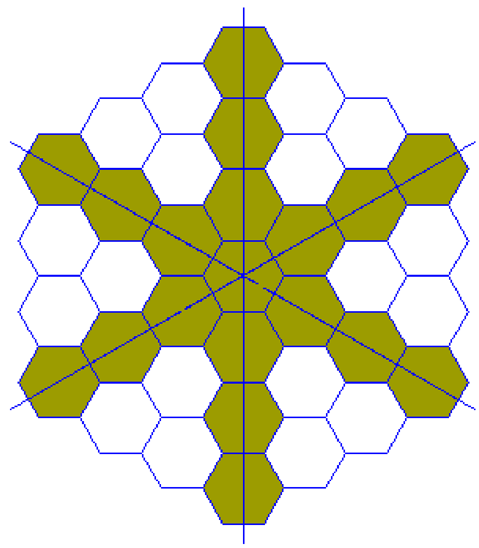
**Preámbulo**.

i En un panal de $n$ capas, diferenciaremos dos tipos de celdas. Para ello, identifiquemos el centro del hexágono de la capa $1$ y tracemos por él las tres rectas perpendiculares a los lados de tal hexágono.

  a Llamaremos celda tipo A a toda celda con intersección no vacía con alguna de esas tres rectas.

  b Toda otra celda del panal que no sea tipo A, será llamada celda tipo B.





ii Note que la celda de la capa $1$ y todas las de la capa $2$ son tipo A. También debe ser claro que toda capa, a partir de la segunda, contiene exactamente $6$ celdas tipo A. Observe además que sobre una celda tipo A de una capa $n \geq 2$ se puede construir solamente una celda tipo A de la capa siguiente.

iii Es claro que las capas $1$ y $2$ no contienen celdas tipo B pero, a partir de la tercera, todas las demás capas tienen celdas tipo B, y su cantidad es un múltiplo de $6$: basta ver que las rectas definidas en i generan $6$ regiones, cada una de las cuales tiene la misma cantidad de celdas tipo B.

iv Las celdas tipo B tienen las siguientes propiedades: i) si dos celdas adyacentes son de tipo contrario entonces sobre ellas dos se apoya una celda tipo B **de la capa siguiente**; y ii) si dos celdas adyacentes son de tipo B entonces sobre ellas dos se apoya una celda tipo B de la capa siguiente.

v De iv se sigue que si en un sector de la capa $n \geq 3$ hay $k$ celdas tipo B, entonces el sector correspondiente de la siguiente capa contiene $k+1$ celdas tipo B. Lo anterior, y la semejanza de los seis sectores, implican que la capa $n+1$ contiene **seis celdas más de tipo B** que las que contiene la capa $n$.

**Demostración de la veracidad de la conjetura**.

Lo dicho en el preámbulo nos permite demostrar la vercidad de la conjetura y por lo tanto expresarla como un teorema:

**Teorema**. El número de celdas de la capa $n \geq 2$ de un panal hexagonal es $C(n) = 6(n-1)$.

**Demostración**. Usaremos el método de demostración por inducción matemática.

i. La fórmula es válida si $n = 2$: $C(2) = 6 \times (2-1) = 6$.

ii. Asumiendo que la fórmula es cierta para una capa $k \geq 2$, (es decir, asumiendo $C(k) = 6(k-1)$) entonces se debe probar que también es cierta para la siguiente capa, esto es: $C(k+1) = 6[(k+1)-1] = 6k$.

Si llamamos $A(k)$ y $B(k)$ a las celda tipo A y B de la capa $k$, respectivamente, entonces, por hipótesis de inducción, $C(k) = 6(k-1) = A(k) + B(k)$. Como, por la parte ii del preámbulo, $A(k) = 6$, entonces $6(k-1) = 6 + B(k)$, de lo cual se sigue que $B(k) = 6(k-2)$.

Finalmente, usando las parte ii y v del preámbulo, se termina la demostración:

$$C(k+1) = A(k) + [B(k) + 6] = 6 + [6(k-2) + 6] = 6k.$$

## ANEXO II

**Prueba de la conjetura según la cual el número de bordes externos que delimitan un panal de $n$ capas es** $T(n) = 6(2n-1)$.

**Preámbulo**. En la demostración de la veracidad de esta conjetura se usarán tanto la terminología como los resultados obtenidos en el ANEXO I, así como la observación siguiente.

**Observación**. (Vea las figuras de las capas $3$ y $4$ en la página anterior).

i Si una celda tipo A tiene lados de la frontera del panal, la cantidad de ellos es $3$.

ii Si una celda tipo B tiene lados de la frontera del panal, la cantidad de ellos es $2$.

**Demostración de la conjetura**.

**Teorema**. El número de bordes externos que delimitan un panal de $n$ capas ($n \in \mathbb{N}$) es $T(n) = 6(2n-1)$.

**Demostración**. De acuerdo con lo dicho en el ANEXO I, en un panal de $n$ capas (para $n \geq 2$), la capa de la frontera (la $n-$ésima) contiene $6$ celdas tipo A $(A(n) = 6)$ y $6(n-2)$ celdas tipo B $(B(n) = 6(n-2))$. Entonces, por la observación anterior, el total de bordes de dicha frontera es:

$$T(n) = 3A(n) + 2B(n) = 3 \times 6 + 2[6(n-2)] = 6[3 + 2(n-2)] = 6(2n-1)$$

Finalmente, si $n = 1$ entonces $T(1) = 6$, lo cual está de acuerdo con la fórmula propuesta:

$$T(1) = 6(2 \times 1 - 1) = 6$$