OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

OCTAVA EDICIÓN

PRUEBA CLASIFICATORIA   NIVEL AVANZADO

Documento de estudio: cuestionario, análisis de preguntas y respuestas.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE
CALI, COLOMBIA

Abril de 2014

AVANZADO

1. El promedio (media aritmética) de un conjunto de números es la suma de dichos números dividida entre el total de números que se sumaron. Por ejemplo, el promedio entre 4, 5, 10 y 13 es 8 puesto que

$$\frac{4+5+10+13}{4}=8$$

¿Qué número debe eliminarse de la lista:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

para que el promedio de los números restantes sea 6,1?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Respuesta: a.

Análisis. Lo fundamental en este ejercicio es la definición de promedio de un conjunto de números: $p=\frac{s}{n}$, donde s es la suma de tales números y n es la cantidad de ellos.

Puesto que se debe retirar uno de los once números dados para que el promedio sea 6.1, la ecuación resultante es $\frac{s}{10}=6.1$, de lo cual se sigue que $s=61$.

Por último, ya que la suma de los once números dados es 66, el número que se debe retirar es el 5: quedan 10 números cuya suma es 61 y por lo tanto su promedio es $\frac{61}{10}=6.1$.

2. El producto de tres números naturales consecutivos, sumado al número intermedio es siempre:

   a) Un cubo b) Un número impar c) Un cuadrado d) Un número par e) Ninguna de las ant.

   Respuesta: a.

   Análisis. Este es un ejercicio de manejo algebraico. Si a los tres naturales consecutivos los llamamos $n, n+1$ y $n+2$, entonces el producto de ellos más el del medio se puede expresar de la siguiente manera: $n(n+1)(n+2)+(n+1)$, expresión que se puede transformar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)+(n+1) &= (n+1)[n(n+2)+1] \\ &= (n+1)[n^2+2n+1] \\ &= (n+1)(n+1)^2 \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

   Lo anterior muestra que la expresión dada es **siempre** un cubo.

   Nota 1. Eventualmente alguien pudo haber procedido por tanteo, escogiendo números pequeños, como por ejemplo $1 \times 2 \times 3 + 2 = 6 + 2 = 8$, $2 \times 3 \times 4 + 3 = 24 + 3 = 27$, con lo cual pudo haber descartado las opciones b, c y d, y haber escogido la opción **a**, dado que 8 y 27 son cubos (en cuyo caso su respuesta se ha calificado como correcta). No obstante, y a pesar de que se pudo haber escogido la opción correcta, tal procedimiento es insuficiente: no se ha **probado** que la expresión sea **siempre** un cubo, pues de las infinitas ternas posibles de números solo se analizaron unas pocas.

   Un razonamiento de este tipo (que obtiene resultados generales sin demostración y) solo con base en casos particulares, se conoce en lógica como una **falacia** de generalización apresurada.

   Nota 2. A pesar de la crítica anterior, el procedimiento mencionado no deja de tener algún mérito: por una parte, muestra que se ha comprendido el enunciado del ejercicio; y por otra, tal vez lo más importante, se ha llegado a **sospechar** (casi creer) que tal resultado general puede ser cierto, aunque su veracidad no haya sido demostrada. Un resultado de este tipo se conoce en matemáticas como una **conjetura** y su valor radica en que, cuando se trata de un problema importante, generalmente la demostración de su veracidad o de su falsedad se convierte en un tema de **investigación** para la comunidad matemática. A manera de ilustración de la importancia de las conjeturas en matemáticas, enseguida se mencionan tres de las más famosas.

   Una conjetura de Fermat. El célebre matemático francés Pierre de Fermat conjeturó que los números de la forma $2^{2^n}+1$ son primos, para cualquier número natural n. Por ejemplo, con n $1, 2, 3,$ se obtienen los primos $5, 17$ y 257. Un siglo después Leonard Euler mostró que $2^{2^5}+1$ no es primo: $2^{2^5}+1 = 4294'967297 = (641)(6'700417)$, así que la conjetura de Fermat era una proposición falsa.

   Otra conjetura de Fermat. Fermat (1601-1665) también conjeturó que la ecuación $x^n + y^n = z^n$, con n natural, tiene soluciones naturales x , y , z solo si n es 1 o 2. Tal conjetura resultó cierta, aunque su veracidad solo fue probada en 1994 por el matemático inglés Adrew Wiles, ¡más de tres siglos después!

   La conjetura de Goldbach. Una de las conjeturas matemáticas más célebres es la de Goldbach, formulada por Christian Goldbach en una carta dirigida a Leonhard Euler en 1742. Una reformulación equivalente al problema original postula que “todo número par mayor que 2 puede escribirse como una suma de dos primos”. **En la actualidad, 2014**, más de 250 años después de haber sido formulada inicialmente, **la conjetura sigue sin ser demostrada ni refutada**.

3. En un recipiente se tiene cierta cantidad de ácido clorhídrico, en otro, la misma cantidad de agua. Para preparar una solución se vierten del primer recipiente al segundo 20 centimetros cúbicos de ácido. Luego, dos tercios de la solución que se obtuvo en el segundo recipiente se vierten al primero. Después de esto, en el segundo recipiente queda exactamente un cuarto de la cantidad del líquido que contiene el primero. ¿Qué cantidad de agua, medida en centímetros cúbicos, había inicialmente?

   a) 80 b) 100 c) 190 d) 380 e) 420

   Respuesta: b.

   Análisis. En este caso se debe transformar el enunciado verbal en uno algebraico. Se pide hallar la cantidad de agua que había inicialmente. Llamemos A al recipiente que contiene inicialmente ácido clorhídrico y B al que contiene agua. Llamemos x (en cm^3) a la cantidad inicial, tanto de ácido clorhídrico como de agua (y por lo tanto a la incógnita del ejercicio). Veamos entonces la cantidad que queda en cada recipiente después de cada paso:

Recipiente	A	B
Cantidad inicial (en cm^3):	x	x
Primer paso ($20cm^3$ de A a B):	$x-20$	$x+20$
Segundo paso ($2/3$ de B van a A):	$(x-20)+\frac{2}{3}(x+2)$	$\frac{1}{3}(x+20)$

   De la condición final (lo que queda en B es la cuarta arte de lo que queda en A) se obtiene una ecuación en x cuya solución es la respuesta del problema:

$$\frac{1}{3}(x+20)=\frac{1}{4}[(x-20)+\frac{2}{3}(x+20)]$$

   Multiplicando inicialmente en ambos lados por 3 y por 4 se obtienen las siguientes transformaciones de la anterior ecuación:

$$\begin{aligned} 4(x+20) &= 3[(x-20)+\tfrac{2}{3}(x+20)] \\ 4(x+20) &= 3(x-20)+2(x+20) \\ 4x+80 &= 3x-60+2x+40 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

4. Si a la suma de los primeros 2014 números naturales pares le restamos la suma de los primeros 2014 números naturales impares obtenemos:

   a) 0 b) 250 c) 500 d) 1007 e) 2014

   Respuesta: e.

   Análisis. Una estrategia eficiente en este caso consiste en agrupar cada sumando **par** con el **impar** anterior a él, y efectuar la resta: $2-1=1,\ 4-3=1,\ 6-5=1,$ y así sucesivamente. Puesto que la resta en cada agrupación es 1 y la cantidad de agrupaciones es 2014, entonces el resultado de la resta propuesta en el ejercicio es 2014.

   Nota 1. Las habilidades tanto de transformar problemas en otros equivalentes al original como de identificar regularidades, son altamente valoradas en el quehacer matemático. A manera de ejemplo, seguidamente se muestra una forma de hallar (y probar la validez de) una fórmula para la suma de los n primeros números naturales: $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   La observación de que, en la suma propuesta, la suma del primer sumando con el último es igual a la del segundo con el penúltimo, del tercero con el antepenúltimo, etc., sugiere escribir dicha suma (S) de dos maneras, primero en orden creciente y luego en orden decreciente.

   $$\begin{aligned} S &= 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + ... + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 \end{aligned}$$

   Sumando las dos ecuaciones anteriores, y agrupando en el lado derecho cada término de la primera fila con el correspondiente de la segunda, se obtiene la siguiente ecuación:

   $$2S = (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) = n(n+1)$$

   Finalmente, como $2S = n(n+1)$, al despejar S se obtiene $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Ejercicio 1. Use un procedimiento análogo al anterior para deducir las fórmulas correspondientes a las sumas de los n primeros números naturales pares y de los n primeros naturales impares:

   $$\begin{aligned} &2+4+...+2n = n(n+1) \\ &1+3+...+(2n-1) = n^2 \end{aligned}$$

   Nota 1. Otra estrategia que pudo usarse en este punto es la de hallar por separado las sumas de los pares y de los impares, y hacer la resta de ellas. La generalización de este problema exige simbolizar adecuadamente los pares y los impares y usar las fórmulas del ejercicio 1.

   Los primeros naturales pares se pueden escribir de la siguiente manera: $2 = 2\times 1,\ 4 = 2\times 2,\ 6 = 2\times 3;$ en general, el $n-$ésimo natural par es $2n$. (Si n es un **entero**, $2n$ es par, positivo, negativo o cero).

   Los primeros naturales pares se pueden escribir así: $1 = 2\times 1 - 1,\ 3 = 2\times 2 - 1,\ 5 = 2\times 3 - 1;$ en general, el $n-$ésimo natural impar es $2n-1$.

   Ejercicio 2 (Generalización del punto 4 del cuestionario).

   i Halle el resultado de restar **a** la suma de los n primeros naturales pares, la suma de los n primeros naturales impares.

   ii Resuelva el punto 4 del cuestionario como un caso particular del ejercicio anterior.

   iii Si el $k-$ésimo natural impar se escribe de la forma $2n+1$, ¿qué valor tiene n?

5. Si se aumenta el radio de un círculo en un $100\,\%$, su área aumenta en un:

a) $100\,\%$ b) $200\,\%$ c) $300\,\%$ d) $400\,\%$ e) $500\,\%$

Respuesta: c.

Análisis. Supongamos que el radio del círculo inicial es R. Puesto que el $100\,\%$ de R es R, el radio del círculo ampliado será $2R$. Por lo tanto las áreas del círculo inicial y del ampliado serán πR^2 y $\pi(2R)^2 = 4\pi R^2$, respectivamente. Esto significa que el área se ha aumentado o incrementado en $4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2$. En consecuencia, el porcentaje de este incremento, con respecto al área del círculo inicial, es $\dfrac{100 \times 3\pi R^2}{\pi R^2} = 300\,\%$.

Nota. Un análisis más detallado de este ejercicio requiere precisar los conceptos de porcentaje e incremento absoluto, incremento relativo y porcentaje de incremento de una cantidad. Veamos cada uno de esos aspectos.

Porcentaje. Empecemos con un ejemplo: el $25\,\%$ de 40 es 10, lo cual se logra sabiendo que el $25\,\%$ de una cantidad es la cuarta parte de ella: $25\,\%C = \dfrac{25}{100}C = \dfrac{1}{4}C$. En general, el $n\,\%$ de C es $\dfrac{n}{100}C$.

Incremento absoluto. Si una cantidad I se transforma en otra F, el incremento absoluto de la cantidad inicial se define como $\Delta = F - I$. Por ejemplo, si $I = 50$ y $F = 75$, la cantidad I se ha incrementado en $\Delta = 75 - 50 = 25$. Si $I = 50$ y $F = 40$, $\Delta = 50 - 40 = -10$: ha habido un incremento negativo de 10 unidades.

Incremento relativo. Si una cantidad I se transforma en otra F, el incremento relativo de la cantidad inicial se define como $\Delta_r = \dfrac{\Delta}{I}$. Por ejemplo, si $I = 50$ y $F = 75$, la cantidad I ha tenido un incrementado relativo de $\Delta_r = \dfrac{\Delta}{I} = \dfrac{25}{50} = \dfrac{1}{2}$: el incremento ha sido la mitad de I.

Porcentaje de incremento. Si una cantidad I se transforma en otra F, el porcentaje de incremento de I se define como $\%\Delta = 100\Delta_r\,\%$. Por ejemplo, si $I = 50$ y $F = 75$, entonces I se ha incrementado en un $50\,\%$: $\%\Delta = 100\Delta_r\,\% = 100 \times \frac{1}{2}\,\% = 50\,\%$.

En el punto 5 del cuestionario, con respecto al área se tiene:

$$\Delta = 4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2, \quad \Delta_r = \frac{\Delta}{I} = \frac{3\pi R^2}{\pi R^2} = 3 \quad \text{y} \quad \%\Delta = 100\Delta_r\,\% = 100 \times 3\,\% = 300\,\%.$$

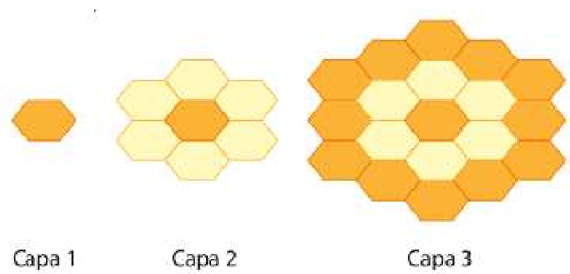
6. El mago Borisqueta tiene en su sombrero tres tarjetas: una blanca por ambos lados, otra negra por ambos lados y la tercera con un lado negro y el otro blanco. Le pide a una persona del público que saque una tarjeta sin mirar y la ponga sobre una mesa. Entonces todos miran y ven que la cara visible es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra cara también sea blanca?

   a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 1

   Respuesta: c.

   Análisis. Puesto que la cara visible de la carta destapada es blanca, dicha carta solo puede ser la de ambos lados blancos o la de un lado blanco y el otro negro (así que queda descartada la de ambas lados negros). Luego la probabilidad de que la otra cara de la carta destapada también sea blanca es $\frac{1}{2}$.

El siguiente enunciado está relacionado con las preguntas 7 y 8. ¿Has observado cómo las abejas construyen su panal? Este crece por capas de celdas hexagonales...



7. Si en cada celda (hexagono) solo habita una abeja, ¿cuántas abejas alberga un panal de 7 capas?

a) 120 b) 126 c) 127 d) 130 e) 136

Respuesta: c.

Análisis. En este punto y en el siguiente, el procedimiento más adecuado es el de tratar de identificar algunas regularidades y obtener conjeturas razonables que permitan responder las preguntas.
(En las condiciones de un examen es a veces difícil **probar** la veracidad de ciertas conjeturas).

Tratemos de identificar la cantidad de celdas hexagonales de **cada capa**.

Observación 1. De la información dada se obtiene:

Capa $\#$	$\#$ **de celdas**
1	1
2	6
3	12

Observación 2. Un cálculo directo (en la figura de la capa 3) muestra que la capa 4 contiene 18 celdas.

Después de observar que las cantidades de celdas de las primeras capas generan la sucesión $1, 6, 12, 18$, **conjeturamos** que la cantidad de celdas de las capas crece de 6 en 6 (a partir de la segunda), y por lo tanto el número de celdas de las primeras 7 capas está dado en la sucesión $1, 6, 12, 18, 24, 30, 36$.

En consecuencia, y asumiendo que la conjetura es cierta, la cantidad de celdas (y por lo tanto de abejas) del panal es 127:

$$1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 = 127$$

Nota. La veracidad de esta conjetura la justificaremos en el ANEXO I, al final de este documento.

Nota. Para generalizar el problema, es conveniente escribir la suma anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & 1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 \\ = & 1 + 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 + 6 \times 5 + 6 \times 6 \\ = & 1 + 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \end{aligned}$$

Ejercicio. i. Utilizando la conjetura propuesta, halle una fórmula para el total de celdas de un panal de n capas, siendo n un número natural. ii. Utilice la fórmula encontrada en i para determinar el total de celdas de un panal de 1 capa, de 2 capas, de 3 capas y de 7 capas. (Si su fórmula es buena, estos resultados deben ser 1, 7, 19 y 127).

8. Al observar los panales, vemos que el número de bordes externos que delimitan la colmena es: 6 si la colmena solo tiene una capa y 18 si la colmena tiene 2 capas. ¿Cúal será el número de bordes externos de la colmena con 7 capas?

   a) 78 b) 80 c) 82 d) 84 e) 86

   Respuesta: a.

   Análisis. De la figura de la capa 3 se observa que el número de bordes externos es 30, y por lo tanto la cantidad de bordes externos de una colmena cuyo números de capas es $1, 2, 3$ es $6, 18$ y 30, respectivamente, lo cual sugiere como ley de formación 6×1, 6×3, 6×5, y en general $6(2n - 1)$ bordes externos para una colmena de n capas (esta es **otra conjetura**).

   En consecuencia, y asumiendo la veracidad de la conjetura, el número de bordes externos de la colmena de 7 capas es $6(2 \times 7 - 1) = 6 \times 13 = 78$.

   Nota. La demostración de la veracidad de esta conjetura se hará en el ANEXO II.

9. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tiene las siguientes dos propiedades:

   i. $f(1) = 2$.
   ii. Para todo $x, y \in \mathbb{N}$, $f(x + y) = f(x) + f(y) + 1$.

   ¿Cuál es el valor de $f(3)$?

   a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

   Respuesta: e.

   Análisis.

   De i y ii se sigue que $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$, así que $f(2) = 5$.

   Usando este resultado y la propiedad i obtenemos $f(3) = f(2+1) = f(2)+f(1)+1 = 5+2+1 = 8$.

   Nota. Las propiedades i y ii permiten definir la función f por recursión (o por inducción matemática): i. $f(1) = 2$; y ii. $f(n + 1) = f(n) + f(1) + 1$, para todo número natural n.

   Ejercicio 1.

   i Halle una fórmula explícita para $f(n)$, siendo n un número natural.
   ii Compruebe que su fórmula funciona cuando $n = 2$ o 3.
   iii Demuestre por inducción matemática la validez de su fórmula.

   Ejercicio 2. Suponga que la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se define por recurrencia de la siguiente manera: i. $g(1) = 1$; ii. $g(n + 1) = (n + 1)g(n)$.

   i Halle una fórmula explícita para $g(n)$.
   ii Use su fórmula para calcular $g(2)$, $g(3)$ y g(4).

10. Cinco amigos, Andrés, Benito, Cesar, Darío y Estrella, se ubican en fila india, no se sabe el orden en que están dispuestos. Empiezan a contar de cinco en cinco: el 1°dice 5, el 2°dice 10, el 3°dice 15, el 4°dice 20, el 5°dice 25, el 1°sigue con 30 y siguen contando. Andrés ha dicho 140, Benito 160, Cesar 130, Darío 170. ¿Quién de ellos diría 2015?

    a) Andrés b) Benito c) Cesar d) Darío e) Estrella

    Respuesta: a.

    Análisis. Cada ronda termina en un múltiplo de 25. Por lo tanto:

    Quien dijo 140, Andrés, es el tercero: el cociente de la división $140 \div 25$ es 5 y su residuo 15. Esto significa que después de la quinta ronda ($25 \times 5 = 125$), continúan $130, 135, 140$. Note que la posición se obtiene dividiendo el residuo por 5: $15 \div 5 = 3$.

    Benito, quien dijo 160 ocupa la segunda posición: el residuo de $160 \div 25$ es 10 y $10 \div 5 = 2$.

    César es el primero: el residuo de $130 \div 25$ es 5 y $5 \div 5 = 1$.

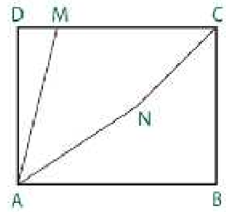
    Darío es el cuarto: el residuo de $170 \div 25$ es 20 y $20 \div 5 = 4$.

    Obviamente Estrella ocupa la quinta posición.

    Ahora, como el residuo de 2015 es 15 y $15 \div 5 = 3$, quien dijo 2015 fue el tercero: Andrés.

    Comentario. Andrés dijo 2015 ¡después de 80 rondas! Aunque pensándolo mejor, es bastante improbable que cinco personas cuerdas pierdan el tiempo de esa manera...

11. El rectángulo $ABCD$ es tal que el lado $\overline{AB}$ mide 5cm y el lado $\overline{BC}$ mide 4cm. M es un punto de $\overline{CD}$ tal que $\overline{MC} = \overline{BC}$. N es el punto medio de $\overline{MB}$. ¿Qué porción del rectángulo $ABCD$ representa el cuadrilatero $AMCN$?



a) $1/3$ b) $1/2$ c) $9/20$ d) $11/20$ e) $3/4$

Respuesta: c.

Análisis. Para calcular el área de la figura irregular $AMCN$, hallaremos el área de la parte externa y la restaremos del área del rectángulo.

La parte externa se puede descomponer en tres triángulos: ADM, ANB y BNC, cuyas áreas son:

Área de $\triangle ADM$. En este triángulo rectángulo (D es recto) tomando DM como base, su altura es AD. La longitud de DM (en cm) es 1 pues $DM = DC - MC$, con $DC = AB = 5$ y $MC = BC = 4$. Por otra parte, $AD = BC = 4$. En consecuencia el área del triángulo ADM es $\frac{1}{2}(1 \times 4) = 2\ cm^2$.

Para determinar las áreas de los triángulos $\triangle ANB$ y $\triangle BNC$ es necesario determinar las distancias del punto N a los lados AB y BC. Para ello, llamemos P al pié de la perpendicular desde M al segmento AB. Entonces el cuadrilátero $PMCB$ es un cuadrado de $4\ cm$ de lado y N es su centro, por lo cual la distancia de N a cualquiera de los lados del cuadrado es $2\ cm$.

Área de $\triangle ANB$. Como la base AB mide $5\ cm$ y la altura (trazada desde N hasta AB) mide $2\ cm$, entonces el área de $\triangle ANB$ es $5\ cm^2$.

Área de $\triangle BNC$. Como la base BC mide $4\ cm$ y la altura (trazada desde N hasta BC) mide $2\ cm$, entonces el área de $\triangle ANB$ es $4\ cm^2$.

Tenemos entonces calculada el área de la región externa al cuadrilátero $AMCN$: la suma de las áreas de los triángulos ADM, ANB y BNC, o sea $2 + 5 + 4 = 11\ cm^2$.

Como el área del rectángulo $ABCD$ es $5 \times 4 = 20\ (cm^2)$ entonces el cuadrilátero $AMCN$ tiene un área de $9\ cm^2$.

Por lo tanto la razón entre el área del cuadrilátero $AMCN$ y la del rectángulo $ABCD$ es $\frac{9}{20}$.

12. En clase de cálculo el profe definió una nueva operación, a la que llamó operación Diamante, $\diamond$, y dijo: El diamante entre dos números enteros distintos a, b lo vamos a calcular así:

$$a \diamond b = \frac{a}{a-b}.$$

Por ejemplo: $1 \diamond 2 = \dfrac{1}{1-2} = -1.$

Después nos retó: Si $a \diamond b = 8$, el valor de $b \diamond a$ es:

a) 1/8 b) -7 c) 7 d) -8 e) 8

Respuesta: b.

Análisis. Por definición, $b\diamondsuit a = \dfrac{b}{b-a}$ (el numerador es el primer término; el denominador, la diferencia del primero menos el segundo). Usemos ahora los datos del problema.

Como $a\diamondsuit b = 8$ y, por definición, $a\diamondsuit b = \dfrac{a}{a-b}$, entonces $\dfrac{a}{a-b} = 8$, así que $a = 8a - 8b$, lo cual equivale a $8b = 7a$.

Despejando b en esta última ecuación, y reemplazando este valor en la ecuación inicial se obtiene:

$$b = \frac{7a}{8}, \qquad \text{y} \qquad b\diamondsuit a = \frac{b}{b-a} = \frac{\frac{7a}{8}}{\frac{7a}{8} - a} = \frac{\frac{7a}{8}}{\frac{7a-8a}{8}} = \frac{7a}{-a} = -7$$

En síntesis, $b\diamondsuit a = -7$.

ANEXO I

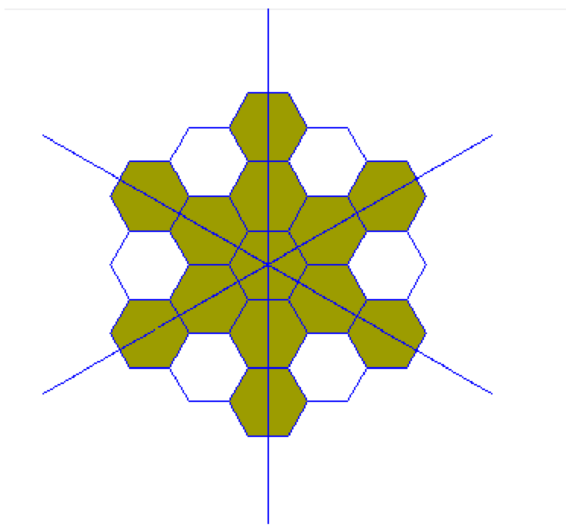
Prueba de la conjetura según la cual la capa n ($n \geq 2$) contiene $C(n) = 6(n-1)$ celdas.

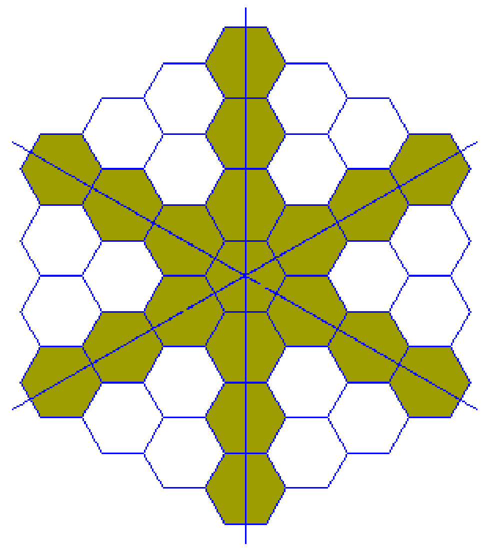
Preámbulo.

i En un panal de n capas, diferenciaremos dos tipos de celdas. Para ello, identifiquemos el centro del hexágono de la capa 1 y tracemos por él las tres rectas perpendiculares a los lados de tal hexágono.

  a Llamaremos celda tipo A a toda celda con intersección no vacía con alguna de esas tres rectas.

  b Toda otra celda del panal que no sea tipo A, será llamada celda tipo B.





ii Note que la celda de la capa 1 y todas las de la capa 2 son tipo A. También debe ser claro que toda capa, a partir de la segunda, contiene exactamente 6 celdas tipo A. Observe además que sobre una celda tipo A de una capa $n \geq 2$ se puede construir solamente una celda tipo A de la capa siguiente.

iii Es claro que las capas 1 y 2 no contienen celdas tipo B pero, a partir de la tercera, todas las demás capas tienen celdas tipo B, y su cantidad es un múltiplo de 6: basta ver que las rectas definidas en i generan 6 regiones, cada una de las cuales tiene la misma cantidad de celdas tipo B.

iv Las celdas tipo B tienen las siguientes propiedades: i) si dos celdas adyacentes son de tipo contrario entonces sobre ellas dos se apoya una celda tipo B **de la capa siguiente**; y ii) si dos celdas adyacentes son de tipo B entonces sobre ellas dos se apoya una celda tipo B de la capa siguiente.

v De iv se sigue que si en un sector de la capa $n \geq 3$ hay k celdas tipo B, entonces el sector correspondiente de la siguiente capa contiene $k+1$ celdas tipo B. Lo anterior, y la semejanza de los seis sectores, implican que la capa $n+1$ contiene **seis celdas más de tipo B** que las que contiene la capa n.

Demostración de la veracidad de la conjetura.

Lo dicho en el preámbulo nos permite demostrar la vercidad de la conjetura y por lo tanto expresarla como un teorema:

Teorema. El número de celdas de la capa $n \geq 2$ de un panal hexagonal es $C(n) = 6(n-1)$.

Demostración. Usaremos el método de demostración por inducción matemática.

i. La fórmula es válida si $n = 2$: $C(2) = 6 \times (2-1) = 6$.

ii. Asumiendo que la fórmula es cierta para una capa $k \geq 2$, (es decir, asumiendo $C(k) = 6(k-1)$) entonces se debe probar que también es cierta para la siguiente capa, esto es: $C(k+1) = 6[(k+1)-1] = 6k$.

Si llamamos $A(k)$ y $B(k)$ a las celda tipo A y B de la capa k, respectivamente, entonces, por hipótesis de inducción, $C(k) = 6(k-1) = A(k) + B(k)$. Como, por la parte ii del preámbulo, $A(k) = 6$, entonces $6(k-1) = 6 + B(k)$, de lo cual se sigue que $B(k) = 6(k-2)$.

Finalmente, usando las parte ii y v del preámbulo, se termina la demostración:

$$C(k+1) = A(k) + [B(k) + 6] = 6 + [6(k-2) + 6] = 6k.$$

ANEXO II

Prueba de la conjetura según la cual el número de bordes externos que delimitan un panal de n capas es $T(n) = 6(2n-1)$.

Preámbulo. En la demostración de la veracidad de esta conjetura se usarán tanto la terminología como los resultados obtenidos en el ANEXO I, así como la observación siguiente.

Observación. (Vea las figuras de las capas 3 y 4 en la página anterior).

i Si una celda tipo A tiene lados de la frontera del panal, la cantidad de ellos es 3.

ii Si una celda tipo B tiene lados de la frontera del panal, la cantidad de ellos es 2.

Demostración de la conjetura.

Teorema. El número de bordes externos que delimitan un panal de n capas ($n \in \mathbb{N}$) es $T(n) = 6(2n-1)$.

Demostración. De acuerdo con lo dicho en el ANEXO I, en un panal de n capas (para $n \geq 2$), la capa de la frontera (la $n-$ésima) contiene 6 celdas tipo A $(A(n) = 6)$ y $6(n-2)$ celdas tipo B $(B(n) = 6(n-2))$. Entonces, por la observación anterior, el total de bordes de dicha frontera es:

$$T(n) = 3A(n) + 2B(n) = 3 \times 6 + 2[6(n-2)] = 6[3 + 2(n-2)] = 6(2n-1)$$

Finalmente, si $n = 1$ entonces $T(1) = 6$, lo cual está de acuerdo con la fórmula propuesta:

$$T(1) = 6(2 \times 1 - 1) = 6$$